

# FENOMENOLOGÍA Y REPRESENTACIONES EN EL TRATADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAL DE JUAN CORTÁZAR

**Carmen León-Mantero**, *Universidad de Córdoba*

**Alexander Maz-Machado**, *Universidad de Córdoba*

**María José Madrid**, *Universidad de Córdoba*

## RESUMEN.

Presentamos un primer análisis de contenido del *Tratado de Álgebra Elemental* del autor bilbaíno del siglo XIX Juan Cortázar, uno de los primeros Catedráticos de matemáticas españoles cuyos libros de texto fueron aprobados para la enseñanza en secundaria desde el año 1848. Mediante la técnica del análisis de contenido, ampliamente utilizada por investigadores en Historia de la Educación Matemática, encontramos en la obra varios tipos de sistemas de representación y situaciones o fenómenos.

**Nivel educativo:** secundaria, bachillerato y universitario.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Los libros y en particular los de texto, han sido tradicionalmente el medio más eficaz para transmitir información, ya sea de tipo conceptual, didáctica, social o cultural. Por ello la investigación histórica en Educación Matemática centrada en los libros de texto nos ayuda a conocer los hábitos y costumbres, los conocimientos científicos de la época y la forma de enseñar dichos conocimientos (Maz y Rico, 2015).

En los últimos años se han realizados numerosas investigaciones sobre Historia de las Matemáticas y Educación Matemática y, en particular, sobre el análisis de manuales de texto. A nivel internacional, destacan los trabajos de Schubring (1987) quien propone líneas de actuación para el análisis de libros antiguos. Entre los trabajos que se han realizado en España encontramos los de Maz (2005) sobre los números negativos en los manuales españoles de los siglos XVIII y XIX o el de Madrid (2016) sobre los textos de aritmética del siglo XVI. Los trabajos de Maz y Rico (2009b; 2013) se encargan además, del estudio de personajes históricos como autores de libros de texto.

La evolución histórica de los conceptos y ámbitos matemáticos constituye uno de los cinco organizadores curriculares, es decir, es uno de los componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas cuya finalidad es la de "señalar algunos momentos a lo largo de la

historia de la matemática en los que el conocimiento matemático considerado tuvo un desarrollo especial o desarrolló algún papel de interés” (Rico, 1997; p.55).

Debido al carácter educativo que poseen los libros de texto, también podemos encontrar en ellos otros dos de los organizadores curriculares propuestos por Rico (1997), en los cuales centraremos nuestra atención a la hora de realizar el análisis del tratado. Estos organizadores son:

- Los fenómenos o situaciones en las que se presentan y emplean los conocimientos y las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos, y
- Las representaciones utilizadas en cada concepto, es decir, el modo simbólico o gráfico por el cual se expresan los conocimientos matemáticos.

La finalidad de nuestro estudio es la de analizar la obra *Tratado de Álgebra Elemental* de Juan Cortázar publicada por primera vez en 1848 y reeditada en cuarenta ocasiones, estando las últimas ediciones publicadas en la primera parte del siglo XX, centrándonos en los sistemas de representación y las fenomenologías halladas en el texto.

Consideramos este estudio de utilidad para los profesores de secundaria, bachillerato y grados universitarios, ya que les permite conocer los tipos de representaciones y fenómenos con los que se trabajaba el álgebra en el pasado y así, poder decidir si los consideran útiles en su práctica docente. Además, podrán identificar si los manuales actuales reproducen los fenómenos y representaciones de forma semejante o, por el contrario, están asociados a situaciones cotidianas actuales.

## 2. METODOLOGÍA.

La metodología usada es el análisis de tipo histórico, en particular el análisis de contenido centrado en los sistemas de representación y las situaciones o fenomenologías asociados a los contenidos matemáticos, usado en investigaciones anteriores como las de Maz y Rico (2009a), Maz-Machado, López y Sierra (2013), Maz y Bracho (2013) o Madrid, Maz-Machado y León-Mantero (2015).

En la primera parte de nuestro estudio, clasificamos las representaciones halladas, entendiendo por representaciones las formas de expresar de manera simbólica o gráfica los conceptos matemáticos y sus propiedades más importantes, como por ejemplo son las representaciones verbales, algebraicas, numéricas o gráficas (Castro y Castro, 1997).

Por último estudiaremos los contextos o situaciones sociales, naturales y matemáticas, que se encuentran presentes en los conceptos, ejemplos y ejercicios propuestos en la obra. El análisis fenomenológico muestra cómo se usan y se aplican los conceptos y la manera de abordar los distintos ejemplos y ejercicios (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008).

### 3. RESULTADOS.

#### 3.1. EL AUTOR: JUAN CORTÁZAR (1809-1873).

Nacido en Bilbao el 8 de junio de 1809, realizó los estudios de Humanidades y los idiomas de francés e inglés los 18 años de edad. Trabajó como profesor de Matemáticas hasta el año 1834 en el que fue becado para estudiar en la Escuela Central de Artes y Manufacturas de París. Al regresar a España, ya con su título de Ingeniero es nombrado Catedrático de Matemáticas Elementales del Instituto de Noviciado de Madrid y en 1850, tras licenciarse en Ciencias Físico-Matemáticas, es nombrado Catedrático de Álgebra Superior y Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central. En 1857 fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, aunque debido a una enfermedad no llegó a ser miembro activo ni a leer su discurso de ingreso. Cortázar muere el 12 de abril de 1873 a los 63 años de edad dejando atrás una prolífica obra que abarca desde tratados de matemáticas reeditados en numerosas ediciones hasta apuntes inéditos incompletos (León-Mantero y Maz-Machado, 2015).

Cortázar supo compatibilizar su docencia con la dirección del Colegio Politécnico, del Colegio Marsanau y de una Academia de Matemáticas a la que bautizó con su nombre, dando respuesta a las necesidades de los continuos cambios de planes de estudio que se produjeron desde 1837 (Rodríguez, 2009).

Algunos de sus alumnos se convirtieron en ilustres profesores de matemáticas, como Hipólito Díaz Pardo y Botaz, y José Andrés Irueste, quien le sustituyó al frente de sus clases al caer Cortázar enfermo. En el XXXIX aniversario de la muerte de su maestro, a Irueste le es encomendada la tarea de escribir una semblanza de su vida y un análisis de su obra en la Revista de la Sociedad Matemática Española. En ella, compara intelectual y moralmente a Cortázar con el destacado filósofo y matemático cordobés D. José Rey y Heredia (Irueste, 1912).

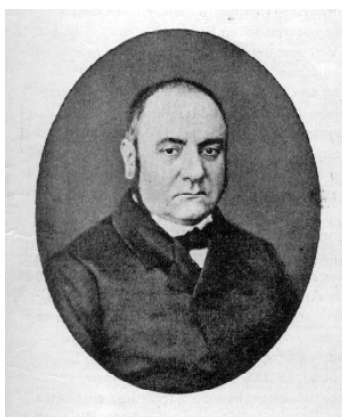


Figura 1. Juan Cortázar Abásolo (Irueste, 1912)

### 3.2. LA OBRA: EL *TRATADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAL*.

Para el análisis del *Tratado de Álgebra elemental*, se ha elegido la decimoquinta edición, impresa en Madrid en el año 1865 en la Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza, ejemplar que forma parte de la biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid.

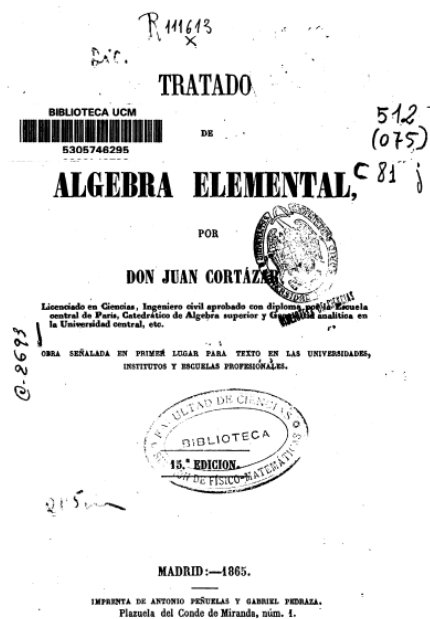


Figura 2. Portada del *Tratado de Álgebra Elemental* (1865)

El tratado se editó por primera vez en 1848 y la última en 1919 tras 40 reediciones. Está formado por un solo tomo de 216 páginas y organizado en 6 libros, éstos a su vez divididos en capítulos, 33 en total. Los 6 libros están dedicados al cálculo algebraico, ecuaciones de primer grado, problemas determinados de primer grado, potencias y raíces de las cantidades algebraicas, ecuaciones de segundo grado y logaritmos y progresiones.

Es una obra que usa un lenguaje formal, que está constituida por definiciones, teoremas con sus respectivas demostraciones, corolarios, métodos de resolución algebraicos y variados ejemplos para mostrarlos. En él se intercalan diferentes capítulos dedicados a resolver problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

LIBRO 1º - Cálculo algébrico	Págs. 4-41
LIBRO 2º - Ecuaciones de primer grado	Págs. 42-72
LIBRO 3º - Problemas determinados de primer grado	Págs. 73- 94
LIBRO 4º - Potencias y raíces de las cantidades algébricas	Págs. 95- 134
LIBRO 5º - Ecuaciones de segundo grado	Págs. 135-166
LIBRO 6º - Logaritmos y progresiones	Págs. 167-216

Tabla 1. Índice del *Tratado de Álgebra Elemental* de Juan Cortázar (1865)

En la portada del tratado se indica que la obra estaba señalada como libro de texto en las Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales. Efectivamente el tratado fue aprobado como libro de texto para la enseñanza en secundaria en 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848), y continuó apareciendo en los posteriores listados oficiales de libros de texto que se actualizaban periódicamente (Peset, Garma y Pérez Garzón, 1978). Además aparece como libro de texto de la asignatura de Álgebra, que se cursaba en la facultad de Ciencias desde el año 1857 de implantación de la Ley Moyano, facultad de la cual Cortázar era catedrático desde 1850 (Universidad de Madrid, 1857).

### 3.2.1 Sistemas de representación

Localizamos cuatro tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas, las representaciones numéricas y las gráficas. Esta clasificación está basada y adaptada de la propuesta de Maz-Machado et al. (2013) y Madrid et al. (2015).

El tipo de representación más abundante es el lenguaje verbal. Se usan las palabras para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones, proponer ejemplos, ejercicios y problemas. Las demostraciones de propiedades y resultados se realizan a través del lenguaje verbal, aunque apoyadas en expresiones simbólicas y numéricas.

“Acabamos de ver que por medio del lenguaje simbólico ó razonamiento artificial se simplifica mucho la resolución de los problemas: este lenguaje simbólico ó razonamiento artificial, aplicado á la resolución de los problemas matemáticos, se llama Álgebra” (Cortázar, 1865; p. 5).

Las representaciones algebraicas combinan números con signos y letras. Se usan frecuentemente para expresar expresiones algebraicas y ecuaciones con el objetivo de clarificar propiedades, realizar demostraciones y dar ejemplos.

$$\begin{aligned} \text{“Ejemplos. 1º. } ab\sqrt{\frac{c^3}{a^2b}} &= \sqrt[5]{\frac{a^5b^5c^3}{a^2b}} = \sqrt[5]{a^3b^4c^3} \\ 2º. \frac{\sqrt{xyz}}{x} &= \sqrt{\frac{xyz}{x^2}} = \sqrt{\frac{yz}{x}} \text{” (Cortázar, 1865; p. 101)} \end{aligned}$$

Para dar ejemplos mediante números y símbolos de las diferentes propiedades, se usan representaciones numéricas. Aparecen en muy pocas ocasiones debido a que se trata de un *Tratado de Álgebra*, para enunciar ejemplos es más frecuente el uso de la representación algebraica.

$$\begin{aligned} \text{“Ejemplos. 1º. } 14 - (-6) &= 14 + 6 = 20. \\ 2º. -14 - (-6) &= -14 + 6 = -8.” \text{ (Cortázar, 1865; p. 8)} \end{aligned}$$

Por último, y aunque solo en dos ocasiones, vemos gráficas para ayudar a resolver problemas de móviles en la que las letras indican la posición de cada uno de los móviles (Figura 4).

**Problema 19.** *Dos móviles salen al mismo tiempo de dos puntos  $M$  y  $M'$ , distantes 49 pies, en el sentido  $MM'A$ : el primero camina  $7\frac{1}{2}$  pies por minuto, y el segundo  $5\frac{1}{2}$  pies por minuto; ¿á qué distancia de los puntos  $M$  y  $M'$  alcanzará el primer móvil al segundo?*



Figura 4. Representación gráfica en el *Tratado de Álgebra Elemental* (p. 5)

### 3.2.2 Fenomenología

Se han encontrado nueve tipos de fenómenos o contextos: fenómenos de desplazamientos, de capacidad, cronológicos, comerciales, laborales, de transmisión, financieros, lúdicos y estrictamente matemáticos, tanto aritméticos como algebraicos. Esta clasificación está basada y adaptada de la propuesta de Maz-Machado et al. (2013) y Madrid y Maz-Machado (2015).

La obra se desarrolla en un contexto fundamentalmente matemático a la hora de dar explicaciones de las operaciones, realizar demostraciones, enunciar ejemplos y proponer ejercicios y problemas. Se manifiestan de dos tipos distintos:

- Aritméticos: para mostrar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de los números negativos, raíces y potencias de números positivos y negativos, resolver problemas de tipo aritmético o calcular valores numéricos de expresiones algebraicas.
- Algebraicos: para resolver las operaciones con expresiones algebraicas, resolver ecuaciones, potencias y raíces de las cantidades algebraicas o expresar los términos generales de las progresiones.

Como complemento a los fenómenos matemáticos, encontramos contextos en los que hay que resolver problemas de situaciones que se encuentran en la naturaleza y se rigen mediante leyes físicas. Encontramos de tres tipos:

- Desplazamientos: para calcular distancias recorridas en ambos sentidos de la recta o la circunferencia (avances o retrocesos) bajo unas condiciones dadas.

"Problema 9º .Siendo en un reloj las 12 en punto, y estando por consiguiente el minutero sobre el horario, ¿qué hora será cuando el minutero vuelva á colocarse sobre el horario?" (Cortázar, 1865; p. 77).

- Capacidad: para calcular los tiempos de llenado o vaciado de productos o sustancias en lugares o recipientes.

"Problema 8º .Se ha llenado de agua en 12 minutos una vasija de 39 azumbres de cabida, habiéndola espuesto primeramente a un caño que arrojaba 3 azumbres de



agua en cada minuto, y despues á otro que arrojaba 4 azumbres de agua en cada minuto. ¿Cuántos minutos estuvo espuesta á cada uno de los caños?" (Cortázar, 1865; p. 76).

- Cronológicos: para calcular la edad o edades de personajes y, para ello se aportan las relaciones entre las edades de dos o varios de ellos o las condiciones entre diferentes periodos de su vida.

"Problema 5º. Preguntándole á uno qué edad tenia un hijo suyo, respondió: si del doble de su edad se resta el triplo de que tenía 6 años há, resultará su edad actual ¿Cuántos años tenia el hijo?" (Cortázar, 1865; p. 75).

Aquellas situaciones que implican la distribución de bienes y servicio, las denominamos situaciones económicas. Encontramos de cuatro tipos:

- Fenómenos comerciales: aquellos que se refieren a situaciones en las que hay implicadas operaciones de compra-venta.

"Problema 18. ¿Cuántas fanegas de trigo de á 50 reales y de á 40 reales se han de mezclar, para tener trigo de á 47 reales, escediendo el primer número al segundo en 30 fanegas?" (Cortázar, 1865; p. 83).

- Fenómenos laborales: aquellos que se refieren a situaciones en las que se debe calcular el salario a percibir por una o varias personas.

"2. º Un particular ha pagado 60 reales por 6 días de trabajo de un obrero y 5 días de trabajo de otro. En otra ocasion, ganando los obreros el mismo jornal, les ha pagado 184 reales por 17 días de trabajo del primero trece del segundo. Se pregunta, cuál fué el jornal de estos obreros." (Cortázar, 1865; p. 92).

- Fenómenos de transmisión: aquellos en los que debemos averiguar las partes correspondientes al reparto de una herencia.

"Problema 11. Dispuso uno en su testamento que del capital que dejaba, se diesen al mayor de sus hijos 1000 duros y la décima parte del resto; que al hijo segundo se diesen 2000 duros y la décima parte del resto; al tercero 3000 duros y la décima parte del resto, y así sucesivamente. Hecho el reparto, se vió que todas las partes eran iguales. Se pregunta, ¿cuánta era toda la herencia, cuántos eran los hijos y cuánto correspondió á cada uno?" (Cortázar, 1865; p. 78).

- Fenómenos financieros: aquellos en los que se presentan situaciones en las que se debe determinar una ganancia o una pérdida económica.

"255. Hallar la relacion que liga al capital, al tanto por 1 anual, al tiempo y á la suma del capital é intereses al cabo de este tiempo" (Cortázar, 1865; p. 209).

Igualmente encontramos fenómenos que implican el cálculo del ganador de un juego o las ganancias obtenidas.

"Problema 4. º Se pusieron dos á jugar con otros, y ambos perdieron, el uno 12 rs. Y el otro 57 rs.: el dinero con que este segundo se levantó del juego era la cuarta parte

del que al primero le había quedado; siendo así que los dos se pusieron á jugar con igual cantidad de dinero. Se pregunta ¿cuál era esta cantidad? (Cortázar, 1865; p. 75).

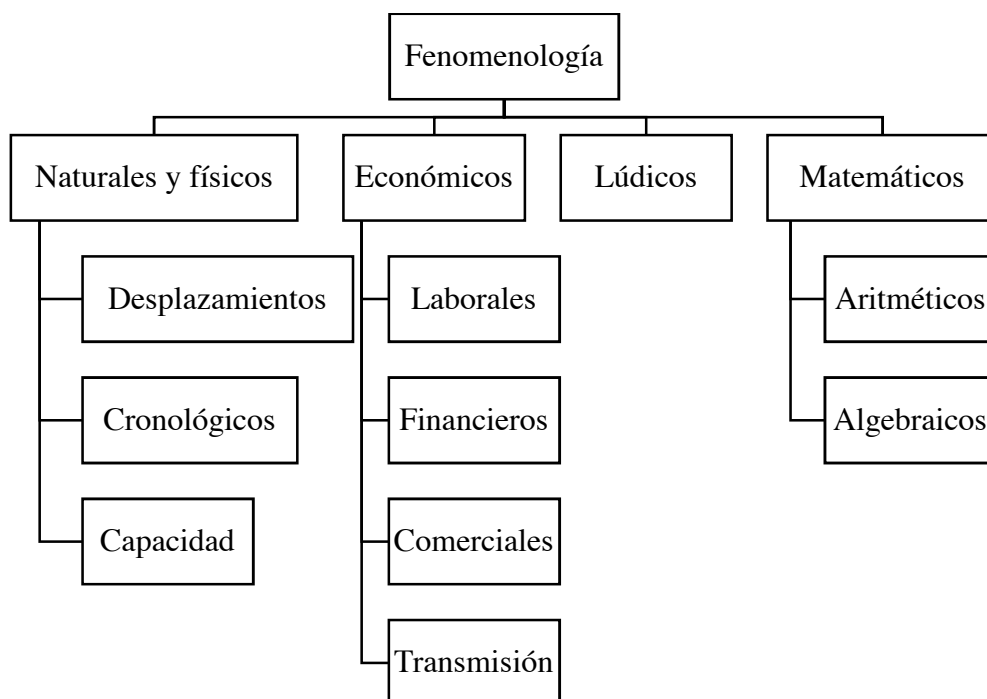


Figura 5. Tipos de fenómenos o situaciones

## 4. CONCLUSIONES.

Podemos considerar al *Tratado de Álgebra Elemental* como una de las obras de mayor importancia para la formación matemática de varias generaciones de españoles durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera parte del siglo XX. El hecho de que fuera reeditado en cuarenta ocasiones, incluso después de la muerte de Cortázar, nos indica la calidad, importancia y transcendencia de la obra.

Al tratarse de una obra sobre Álgebra, el contexto al que más se recurre a la hora de proponer ejemplos y problemas, es el estrictamente matemático, sin embargo también podemos encontrar situaciones de tipo económico, físico o natural o lúdico. Desde el punto de vista fenomenológico, presenta una gran variedad de contextos en los que el cálculo de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones pueden ser aplicadas.

El análisis de contenido centrado en los sistemas de representación de la obra nos muestra que predomina el lenguaje verbal elegido meticulosamente para exponer definiciones, resultados, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas y



el lenguaje simbólico para ejemplificar dichos resultados y ejemplos. En menor medida se hallan representaciones numéricas y gráficas y es nulo el uso de tablas y esquemas.

## REFERENCIAS.

CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997). *Representaciones y modelización*. En Rico, L. (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124), Horsori, Barcelona.

GACETA DE MADRID (1848). Imprenta Real, Madrid.

IRUESTE, J. A. (1912). *D. Juan Cortázar*, Revista de la Sociedad Matemática Española 1, 285-290.

LEÓN-MANTERO, C. Y MAZ-MACHADO, A. (2015). *Juan Cortázar y sus aportaciones a la Educación Matemática española del siglo XIX*. Ensayos, Revista de la Facultad de Educación de Albacete 30, 55-62.

MADRID, M.J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo el siglo XVI*, Universidad de Salamanca, Salamanca.

MADRID, M. J. Y MAZ-MACHADO, A. (2015). *Analysis of two Spanish arithmetic books written in the XVI-century*, Journal of Education, Psychology and Social Sciences 3, 117-121.

MADRID, M. J., MAZ-MACHADO, A. Y LEÓN-MANTERO, C. (2015). *Representations in the Sixteenth-Century arithmetics books*, Universal Journal of Education Research 3, 396-401.

MAZ, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*, Granada: editorial de la Universidad de Granada.

MAZ, A. Y BRACHO, R. (2013). *Acercamiento entre la historia de las matemáticas la educación matemática mediante el análisis de contenido*. En Rico, L., Lupiañez, J.L. y Molina, M. (Eds.) Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp. 349-358). Editorial Comares, Granada.

MAZ, A., Y RICO, L. (2009a). *Números negativos en los siglos XVIII: fenomenología y representaciones*, Revista de Investigación Psicoeducativa 17117-129.

MAZ, A. Y RICO, L. (2009b). *Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008)*, Suma 60, 35-41.

MAZ-MACHADO, A., LÓPEZ, C. Y SIERRA, M. (2013). *Fenomenología y representaciones en la Arithmetica de Juan de Yciar*. En L. Rico L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84), Editorial Comares, Granada.

MAZ-MACHADO, A., Y RICO, L. (2013). *El Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo en el bicentenario de su publicación*, Suma 74, 55-63.

MAZ-MACHADO, A., Y RICO, L. (2015). *Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX*, Relime, Revista latinoamericana de Investigación Educativa 18, 49-76.

PESET, J. L., GARMA, S., & PÉREZ-GARZÓN, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*, Siglo veintiuno, Madrid.

RICO, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas*. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp.39-59), ICE-Horsori, Barcelona.

RICO, L., MARÍN, A., LUPIÁÑEZ, J. L., & GÓMEZ, P. (2008). *Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales*, Suma 58, 7-23.

RODRÍGUEZ, C. (2009). *El instituto del Cardenal Cisneros de Madrid (1845-1877)*, CSIC, Madrid.

SCHUBRING, G. (1987). *On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors*, For the learning of mathematics 7, 41-51.

UNIVERSIDAD DE MADRID (1857). *Anuario de la Universidad Central para el curso 1857-1858*, Madrid.